

Title	$\ell_2$ -spaceニ於ケル解析函数ニツイテ
Author(s)	霜田, 伊左衛
Citation	全国紙上数学談話会. 256 p.406-p.409
Issue Date	1943-08-15
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/75070">https://doi.org/10.18910/75070</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

1137.  $L_2$ -space = 於ケル解析函数ニツイテ

霜田 伊左衛 (改訂)

複素  $L_2$ -space  $E$  / 領域  $D$  デ定義セラレ, 複素  $L_2$ -space  $E'$  = 於ケル値ヲトル函数  $f(x)$  ハ

1)  $D$  = 於テ連續 (holomorphic, 意味ヲ)

2)  $D$  / 任意ノ  $x$ ,  $E$  = 於ケル任意ノ  $y$  = 對シ,  $\delta$ ヲ  
複素數トスレバ

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(y + \delta x) - f(y)}{\delta}$$

が存在スル。乃チ *gatean* / 意味ヲ微分可能  
ナルトキ  $f(x)$  ハ  $D$  デ正則デアルトイヒマス。條件2)ハ或  
ハ  $\delta$  = ツイテ 0 点ノ近傍デ正則デアルト言ヒカヘテモヨロ

シイデセウ。

今  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$

$f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots)$

( $x_n, f_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ハ複素数) トオキ  
マス ト  $f(x)$  ノ 正則性ニツイテ 次ノ 定理ガ 成立シマ  
ス。

[定理]  $f(x)$  ガ  $D$  デ 正則ナルタメノ 必要十分条件ハ

1)  $f(x)$  ハ  $D$  デ *strongly* 連続

2)  $f_n(y + \alpha x)$  ガ  $\alpha$ ニツイテ 正則

( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

[証明] 条件 1) ハ 共有シテ 中マスカラ 条件 2) ニツ  
イテ 考ヘマス。必要條件ニツイテハ,  $f(x)$  ノ 各成分ヲ 考  
ヘマス ト  $f_n(x + \alpha y)$  ハ  $\alpha$  ノ 適當ノ 近傍 (スベテノ  
 $f_n(x + \alpha y)$  = 共通) デ  $\alpha$ ニツイテ 正則トナリマス  
トハ 明ラカデス。

十分条件ヲ 証明スルニ アタリマシテ, 記述ヲ 簡單ニ  
スルタメニ  $D \ni 0$  且ツ一般性ヲ失ハズニ  $y = 0$ ノ 場合  
ヲ 考ヘマス。

$f(\alpha x)$  ガ  $\alpha$ ニツイテ 正則ナルコトヲ 証明スルニハ

$$\left( \frac{df_1(\alpha x)}{d\alpha}, \frac{df_2(\alpha x)}{d\alpha}, \frac{df_3(\alpha x)}{d\alpha}, \dots \right)$$

ガ  $E$  ノ 点トシテ 確定スルコトヲ 証明スルバ 良イコトニナ  
リマス。

$D$  が任意  $x$  をとり, コレを固定します. 適当な正数  $\gamma$  をとりますと  $\alpha x (|\alpha| \leq \gamma) \cap D = \emptyset$  且つ compact set となります. 之れを  $G$  とおきます.  $f(x)$  は  $D$  に連続ですから  $D$  で有界となります.

$$\text{即ち } M \text{ が存在し } \|f(G)\| \leq M$$

条件 2) より  $f_n(\alpha x)$  は  $\alpha = 0$  での正則ですから

$$\frac{df_n(\alpha x)}{d\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\xi x)}{(\xi - \alpha)^2} d\xi \quad (C: |\xi| = r)$$

今正数  $\rho$  ( $\rho < r$ ) を任意にとりますと  $|\alpha| \leq r - \rho + \epsilon$  とす

$$\begin{aligned} \left| \frac{df_n(\alpha x)}{d\alpha} \right|^2 &\leq \left( \frac{r}{2\pi \rho^2} \int_0^{2\pi} |f_n(re^{i\theta} x)| d\theta \right)^2 \\ &\leq \frac{r^2}{4\pi^2 \rho^4} \int_0^{2\pi} |f_n(re^{i\theta} x)|^2 d\theta \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{r^2}{2\pi \rho^4} \int_0^{2\pi} |f_n(re^{i\theta} x)|^2 d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{df_n(\alpha x)}{d\alpha} \right|^2 &\leq \frac{r^2}{2\pi \rho^4} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(re^{i\theta} x)|^2 \right) d\theta \\ &= \frac{r^2}{2\pi \rho^4} \int_0^{2\pi} \|f(re^{i\theta} x)\|^2 d\theta \\ &\leq \frac{r^2 M^2}{\rho^4} \end{aligned}$$

即ち  $f(\alpha x)$  は  $\alpha = 0$  の点の近傍で正則となります

マス。此ハDノ任意ノ点デスカラユレデ吾々ノ定理ハ証明  
出来タコトニナリマス。

—— (以 上) ——